

Estrutura de Dados – Árvores
Prof. Tiago Eugenio de Melo, MSc
tiago@comunidadesol.org

material de referência

<http://www.tiagodemelo.info/aulas>

Roteiro

- Motivação
- Representação de árvores
- Definição
- Terminologia
- Árvores binárias
- Árvores balanceadas
- Árvore binária de busca
- Exercícios

Motivação

- Diversas aplicações necessitam de estruturas mais complexas que as listas estudadas até agora, como listas e filas.
- Diversos problemas podem ser modelados através de árvores.

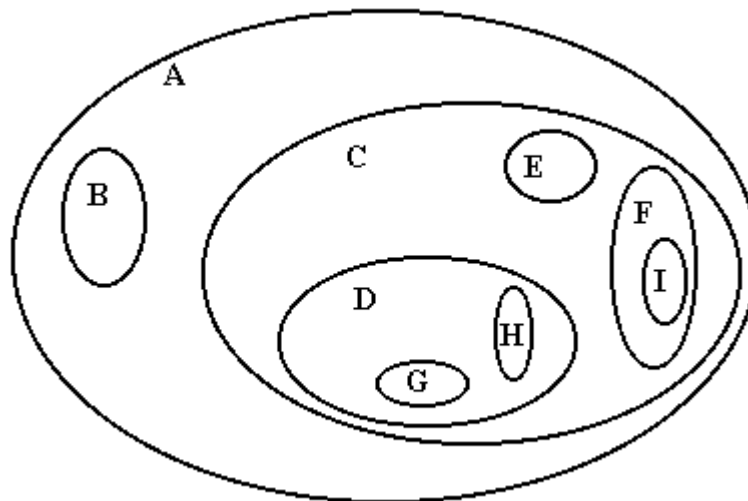
Representação

- Existem três formas de representação:

- Por parênteses aninhados:

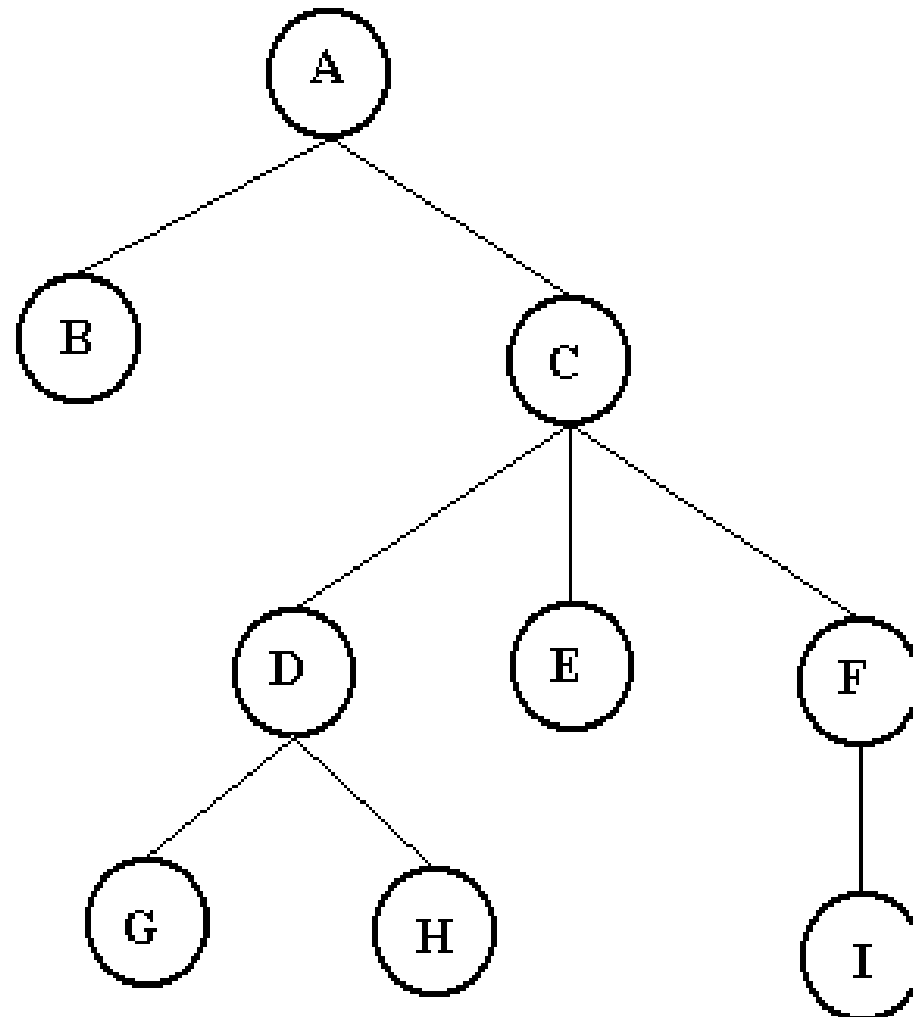
(A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))

- Diagrama de inclusão:



Representação

- Representação hierárquica

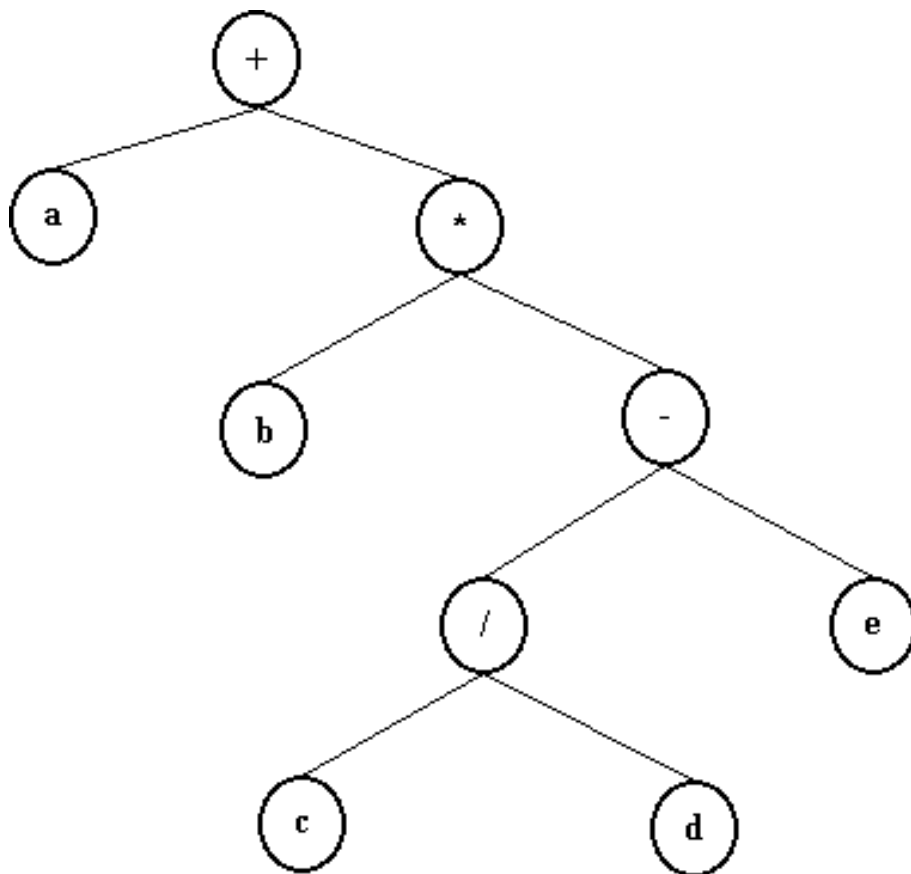


Definição

- Uma árvore é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices tais que:
 - $T = 0$ é a árvore dita vazia ou
 - existe um nó especial r , chamado raiz de T ; os restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em m (deve ser maior ou igual a 1) conjuntos distintos não vazios que são as subárvores de r , cada subárvore a qual é, por sua vez, uma árvore.

Exemplo de árvore

- Considere a seguinte expressão aritmética:
 $(a + (b * (c / d) - e))$



Terminologia

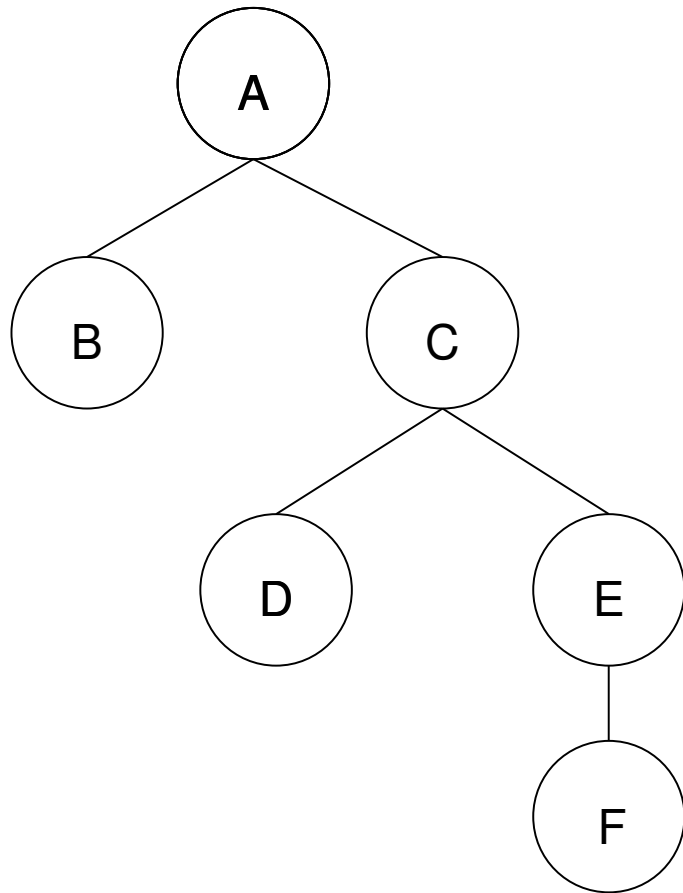
- Subárvore:
 - Cada nó da árvore é a raiz de uma subárvore.
- Grau:
 - O número de subárvores de um nó é o grau daquele nó.
- Folha:
 - Um nó de grau igual a zero é denominado folha ou nó terminal.

Terminologia

- **Nível:**
 - O nível do nó é definido da seguinte forma: a raiz da árvore tem nível 0, enquanto o nível dos demais nós é igual ao número de linhas que o liga à raiz, i.e., é o comprimento do caminho que vai da raiz até este nó.
- **Altura:**
 - É definida como sendo o nível mais alto da árvore.

Terminologia

- Exemplo:

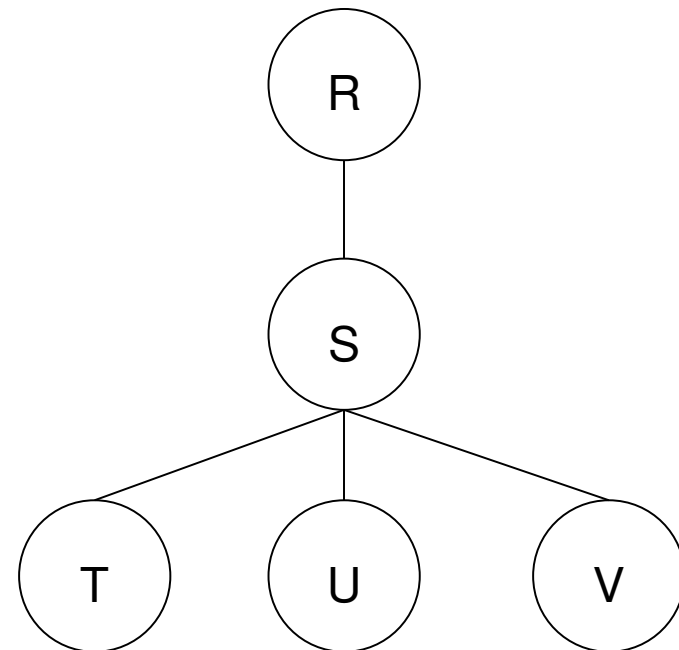
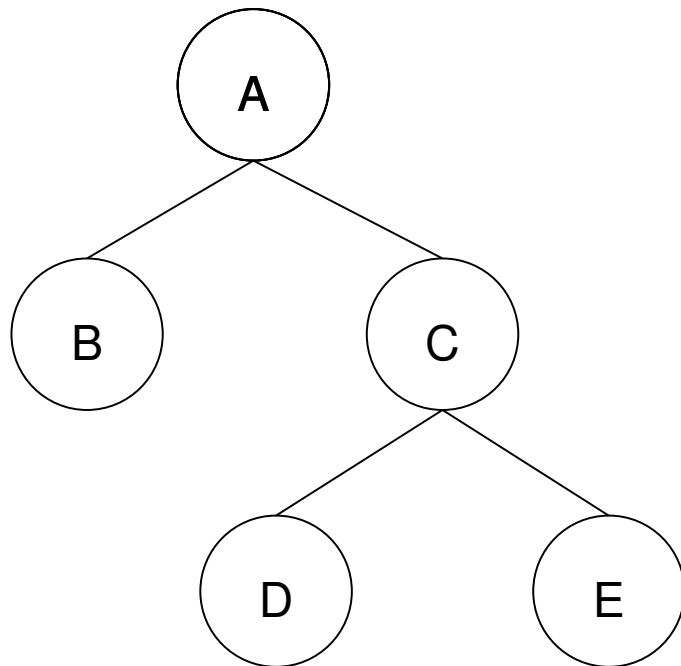


Nó	Grau	Nível
A	2	0
B	0	1
C	2	1
D	0	2
E	1	2
F	0	3

A altura da árvore é igual 3, pois corresponde ao nível mais alto

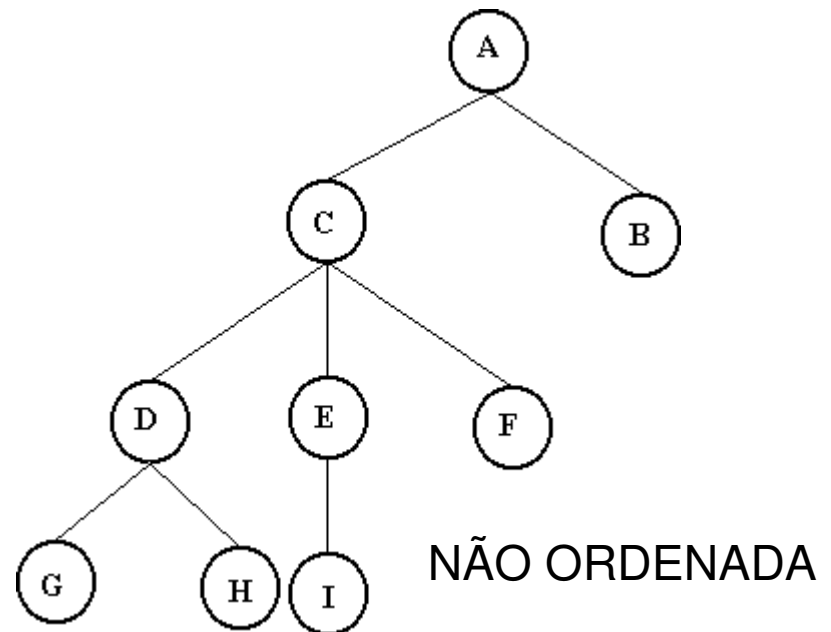
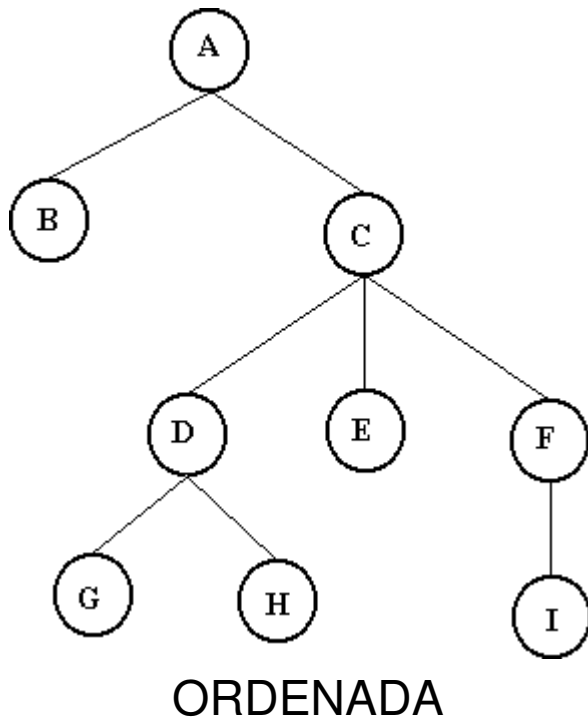
Terminologia

- Floresta:
 - É um conjunto de zero ou mais árvores disjuntas.
 - Exemplos:



Terminologia

- **Árvore ordenada:**
 - É aquela na qual os filhos de cada nó estão ordenados. Assume-se a ordenação da esquerda para direita.

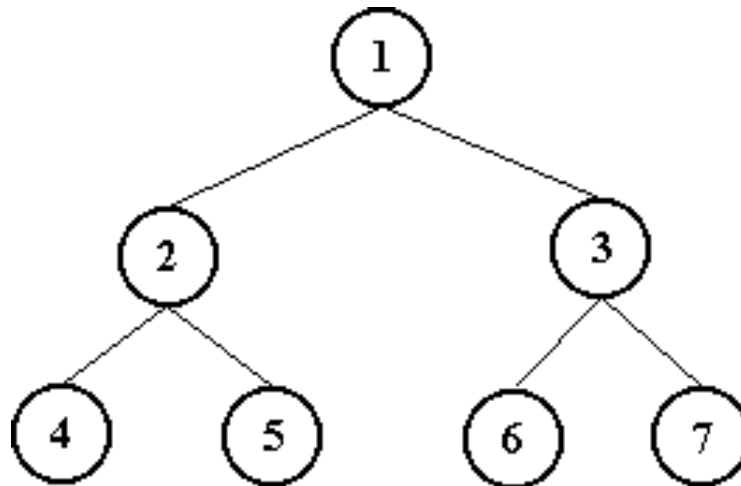


Terminologia

- Árvores isomórfas
 - Duas árvores não ordenadas são isomórfas quando puderem se tornar coincidentes através de uma permutação na ordem das subárvores de seus nós. Duas árvores ordenadas são isomórfas quando forem coincidentes segundo a ordenação existente entre seus nós.

Terminologia

- **Árvore cheia**
 - Uma árvore de grau d é uma árvore cheia se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós tem número máximo de filhos exceto as folhas, e todas as folhas estão na mesma altura.

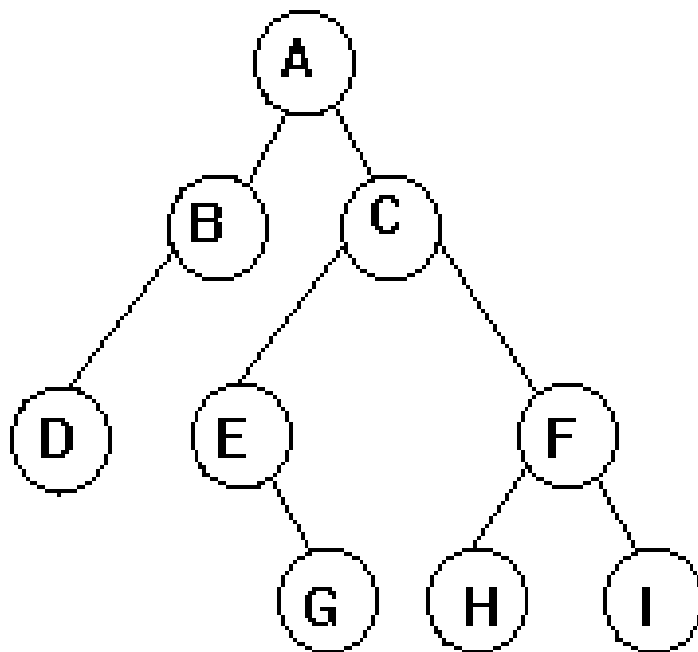


Árvores Binárias

- Uma Árvore Binária T é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices, tal que:
 - $T = 0$ e a árvore é dita vazia ou
 - existe um nó especial r , chamado raiz de T , os restantes podem ser divididos em dois subconjuntos disjuntos, T_{re} e T_{rd} , que são as subárvores esquerda e direita de r , respectivamente e as quais, por sua vez, também são árvores binárias.

Árvores Binárias

- Exemplo:



Tipos de percurso

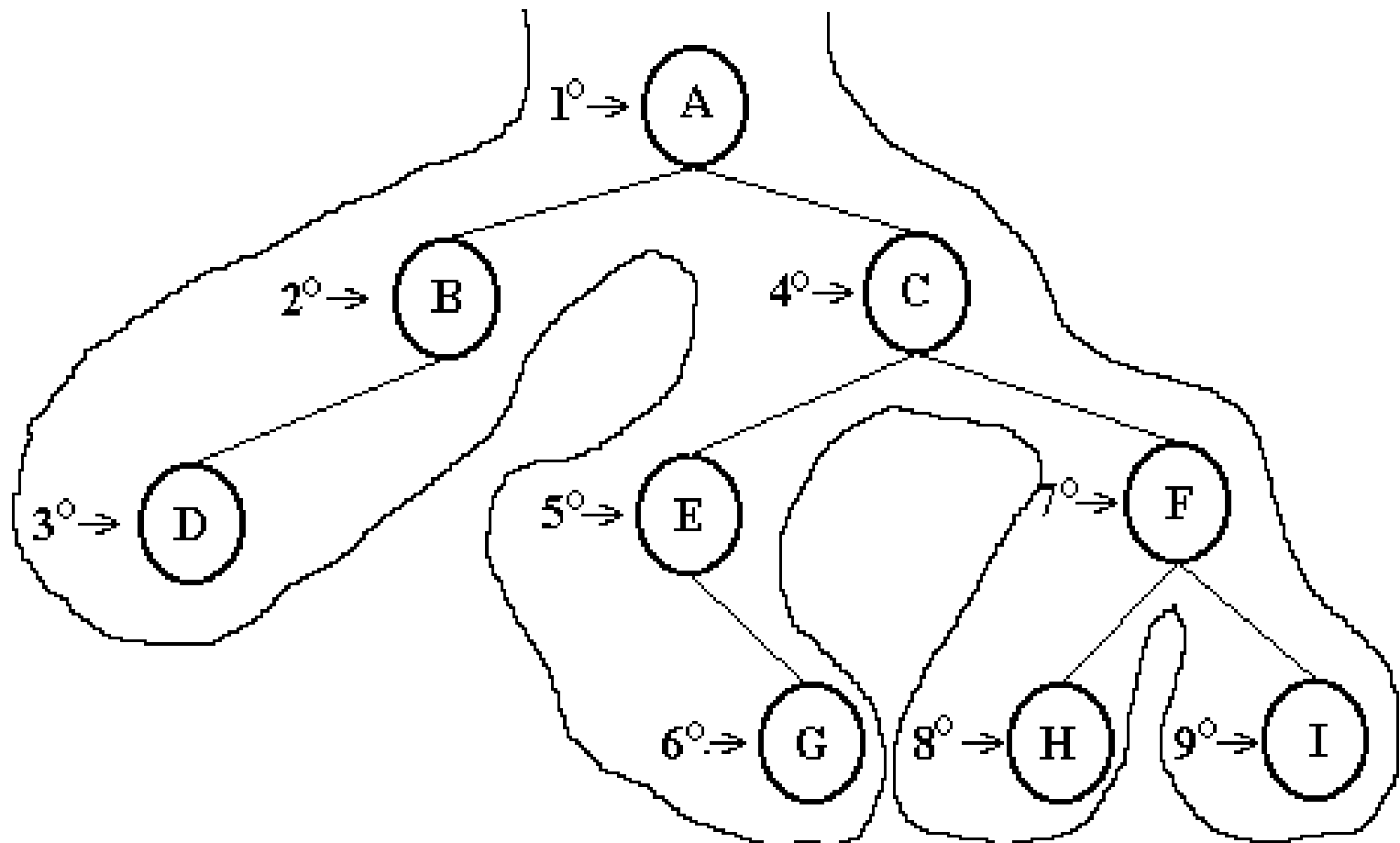
- Percurso é caminho realizado pelos nós da árvore com o objetivo de consultar ou alterar a informação neles contidas.
- No caso de árvores binárias, existem determinadas ordens de caminhamento mais freqüentemente utilizadas, como:
 - Caminhamento pré-fixado.
 - Caminhamento central.
 - Caminhamento pós-fixado.

Tipos de percurso

- Caminhamento pré-fixado:
 - visita a raiz.
 - percorre a subárvore da esquerda.
 - percorre a subárvore da direita.

Tipos de percurso

- Caminhamento pré-fixado:



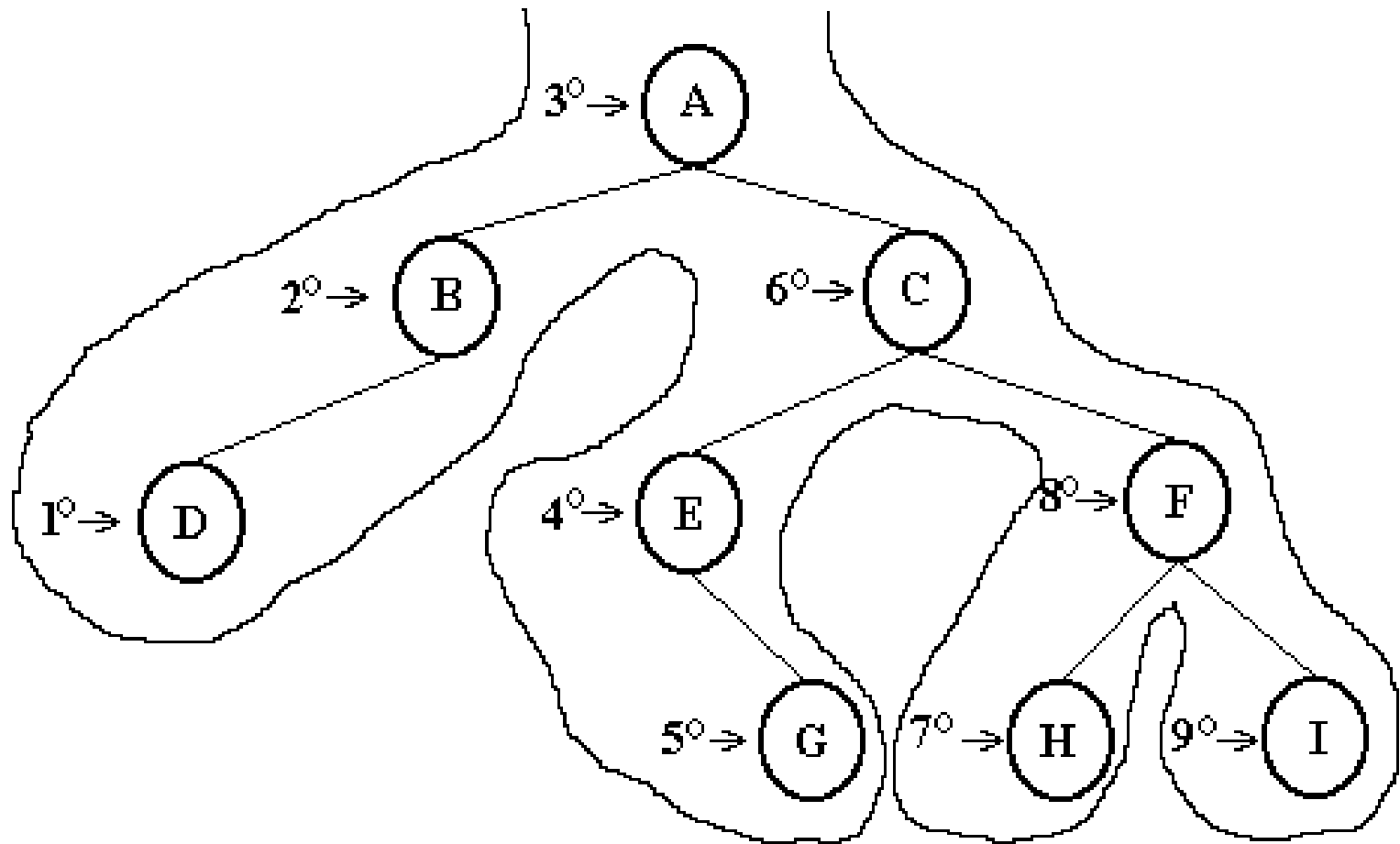
Resultado: A B D C E G F H I

Tipos de percurso

- Caminhamento central:
 - percorre a subárvore da esquerda.
 - visita a raiz.
 - percorre a subárvore da direita.

Tipos de percurso

- Caminhamento central:



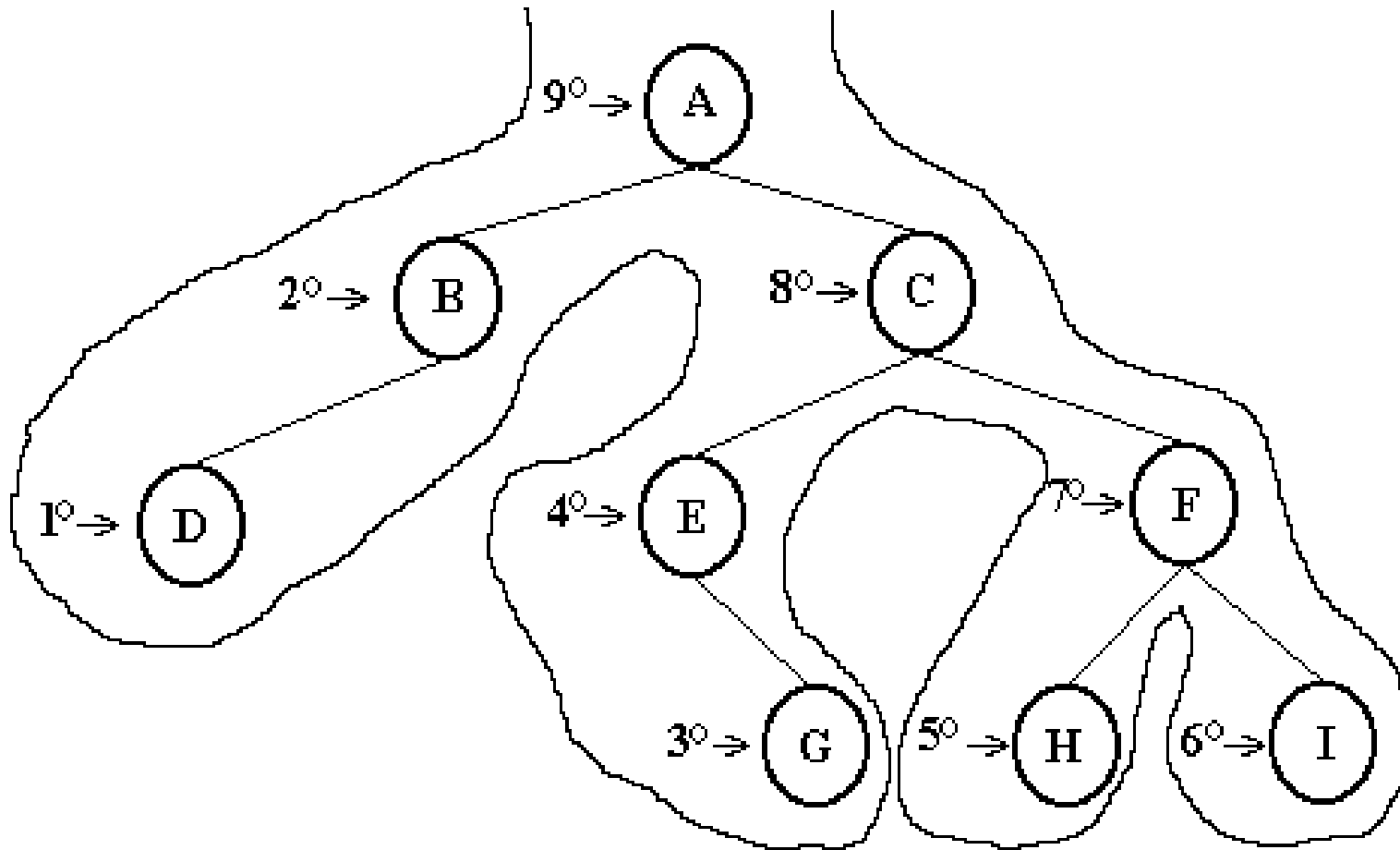
Resultado: D B A E G C H F I

Tipos de percurso

- Caminhamento pós-fixado:
 - percorre a subárvore da esquerda.
 - percorre a subárvore da direita.
 - visita a raiz.

Tipos de percurso

- Caminhamento pós-fixado:



Resultado: D B G E H I F C A

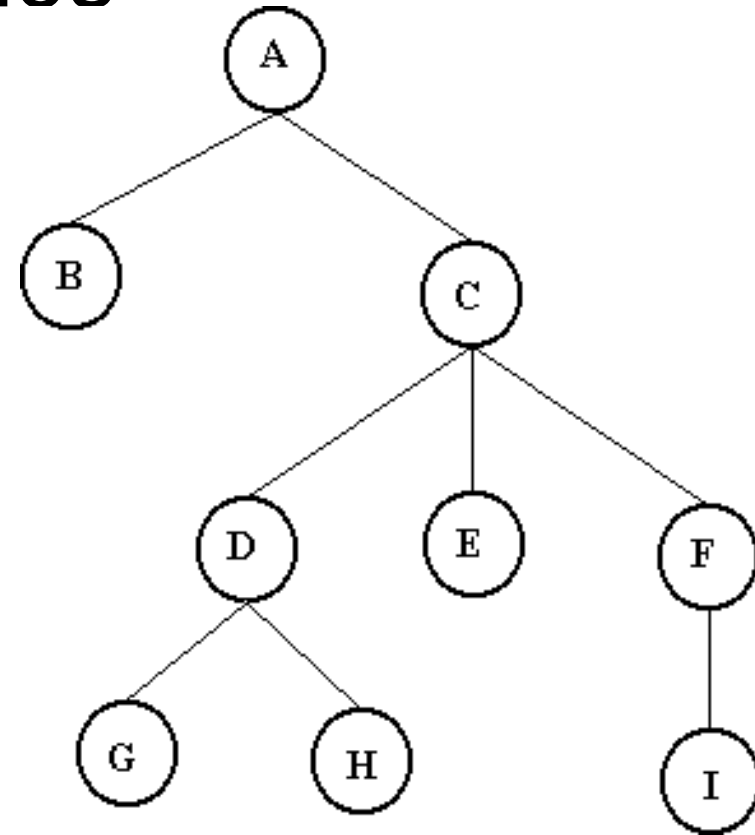
Árvore binária de busca

- Uma Árvore Binária de Busca T ou Árvore Binária de Pesquisa é tal que ou $T = 0$ e a árvore é dita vazia ou seu nó raiz contém uma chave e :
 - Todas as chaves da subárvore esquerda são menores que a chave da raiz.
 - Todas as chaves da subárvore direita são maiores que a chave raiz.
 - As subárvores direita e esquerda são também Árvores Binárias de Busca.

Lista de exercícios

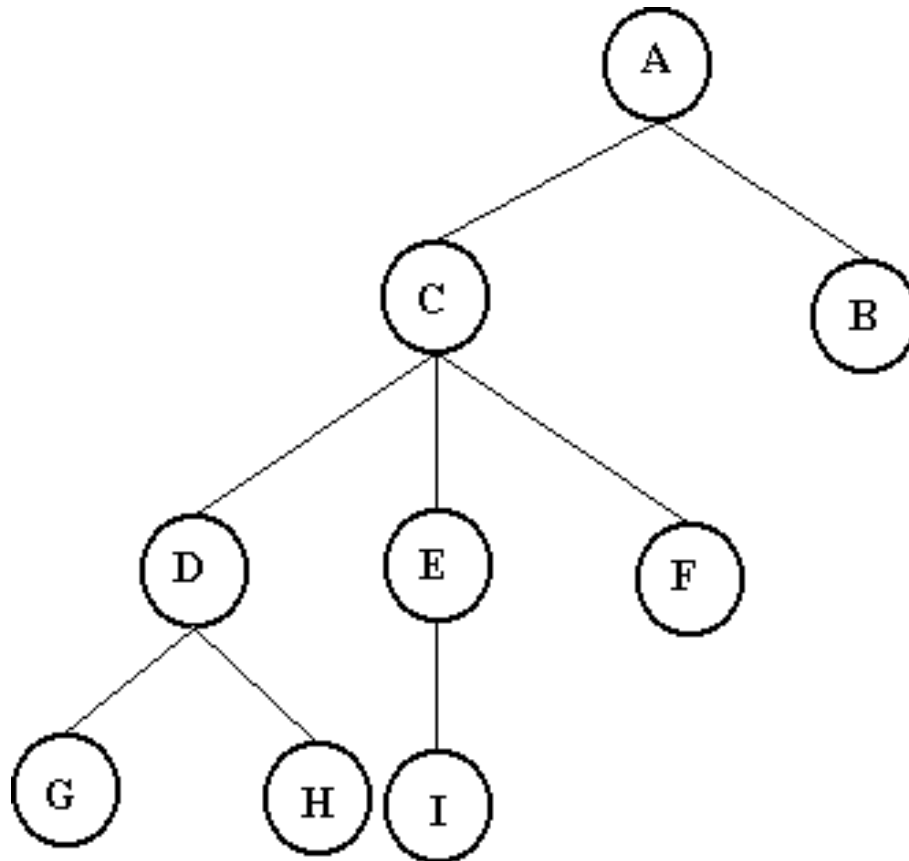
- Considerando a árvore ao lado:

- Quantas subárvores ela contém?
- Quais os nós folhas?
- Qual o grau de cada nó?
- Qual o grau da árvore?
- Liste os ancestrais dos nós B, G e I.
- Identifique todas as relações de parentesco entre os nós
- Justifique: podemos dizer que uma árvore é um dígrafo conexo onde existe um único nó sem predecessor e todos os demais têm um único predecessor.



Lista de exercícios

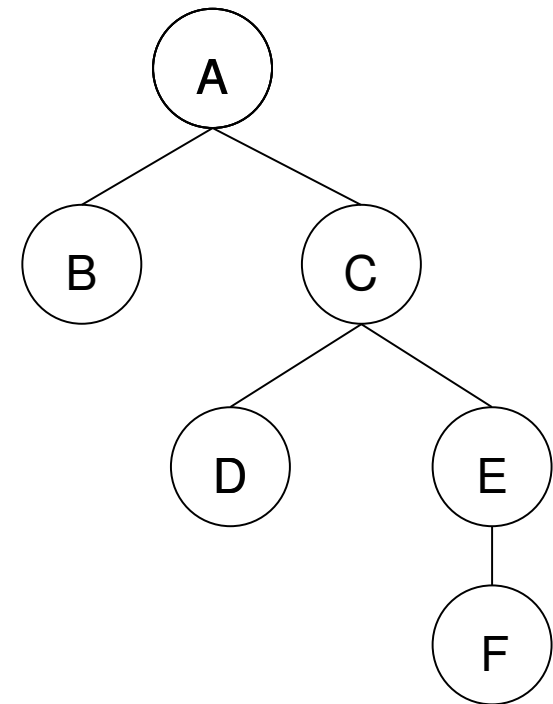
- Explique porque a árvore do exercício anterior e a árvore abaixo são isomórfas.



Lista de exercícios

- Qual é a principal característica de uma árvore binária?
- Qual seria o resultado do percurso da árvore ao lado, considerado:

- O caminhamento pré-fixado.
- O caminhamento central.
- O caminhamento pós-fixado.



Lista de exercícios

- Em que situação, uma árvore binária se compara à uma lista encadeada, quanto à pesquisa de um determinado elemento?

Referências

- <http://www.icmc.usp.br/~sce182/arvore.html>
- <http://w3.ualg.pt/~hshah/ped>
- <http://www.liv.ic.unicamp.br/~bergo/mc202/>